Chapitre 4

Convergences des suites réelles

I Limite, convergence.

1) Limite finie :

a) Définition

Idée intuitive : dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ doit signifier qu'on se rapproche aussi près qu'on veut de ℓ lorsque n est grand.
Traduction mathématique : quel que soit l'intervalle ouvert autour de ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle.

On utilise la définition avec quantificateur suivante :

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *ou* $u_n \underset{+\infty}{\to} \ell$.

b) Remarques

1. Pour tout réel a, dire que $|a| \leq \varepsilon$ est équivalent à $-\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$. Ainsi, affirmer que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$, c'est à dire $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$
   On obtient donc une seconde définition, équivalente à la première : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$
2. Contrairement à la limite de fonction (qu'on reverra plus tard), la limite d'une suite n'a de sens que quand $n \to +\infty$. On notera donc parfois $\lim u_n$ sans dire "$n \to +\infty$" car il n'y a pas d'ambiguïté possible.
3. Une suite qui n'admet pas de limite finie est dite divergente.

A noter : *Précision sur le signe*

On dit que $\lim u_n = \ell^+$ si $\lim u_n = \ell$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \geq \ell$.

De même, on dit que $\lim u_n = \ell^-$ si $\lim u_n = \ell$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq \ell$.

On rencontre cela souvent pour des limites vers 0 (0^+ et 0^-). Par exemple $\lim \dfrac{1}{n} = 0^+$.

Attention, ℓ^+ et ℓ^- ne sont pas des nombres!!!! Ce sont des abréviations.

2) Quelques propriétés issues de la définition

a) Théorème d'unicité :

Théorème 1

Soit ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.
On dit que la limite d'une suite est "unique".

▷ *Preuve :*

◁

b) Partionnement pair/impair :

Théorème 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$.

3) Limite infinie :

a) Définition

Définition 2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, u_n est supérieure à A à partir d'un certain rang, autrement dit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Cette définition signifie en fait :
"À partir d'un certain rang, u_n est aussi grand que l'on veut."
De même, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$$

A noter :

- Comme pour les limites finies, le théorème d'unicité est vérifié, et on peut également utiliser le découpage pair/impair pour déterminer la limite.
- Une suite qui "tend vers" $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas considérée comme convergente. On dit qu'elle "diverge" vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

II Théorèmes généraux

En général, montrer la convergence à partir de la définition est difficile. Heureusement, on a une batterie de théorèmes très utiles :

1) Opérations algébriques sur les limites et formes indéterminées :

Notation

Dans les tableaux ci dessous, on note **F.I.** les "formes indéterminées".
Cela signifie qu'il n'y a pas de résultat vrai à chaque fois : tout peut se passer, de la limite finie à l'absence de limite.
Vous pourrez TOUJOURS déterminer ce qu'il se passe. Ainsi, "forme indéterminée" ne sera jamais une réponse à un calcul de limite....

Dans les tableaux qui suivent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites de nombres réels, ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

Somme de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$					

Produit de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n$								

Quotient de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell>0$ ou $=+\infty$	$\ell>0$ ou $=+\infty$	$\ell<0$ ou $=-\infty$	$\ell<0$ ou $=-\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$									

Exemples de preuve :
Toutes ces formules se démontrent plus ou moins de la même façon. Par exemple pour la somme :
▷ *Preuve* : si $u_n \underset{+\infty}{\to} \ell$ et $v_n \underset{+\infty}{\to} \ell'$ avec ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$:
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists n_1$ tel que $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_2$ tel que $\forall n \geq n_2, |v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Alors pour $n \geq max(n_1, n_2)$, on a, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq \underbrace{|u_n - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|v_n - \ell'|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\to} \ell', \text{ alors } u_n + v_n \underset{+\infty}{\to} \ell + \ell'}$ ◁

▷ *Preuve* : si $u_n \underset{+\infty}{\to} \ell$ et $v_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ avec ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$:
Soit $\varepsilon = 1$. Alors $\exists n_1 / \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq 1$, donc $u_n \geq \ell - 1$
Pour tout $A \in \mathbb{R}$, posons $A' = A - (\ell - 1)$ alors $\exists n_2 / \forall n \geq n_2, v_n \geq A'$
En posant $N = \max(n_1, n_2)$, on a, pour tout $n \geq N$, $u_n + v_n \geq A' + \ell - 1 = A$, donc
Conclusion : $\boxed{\text{si } u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\to} +\infty', \text{ alors } u_n + v_n \underset{+\infty}{\to} +\infty}$ ◁

☹ **Au secours !** *Y'a trop de formules !*
Ces formules peuvent avant tout "se sentir", et n'ont pas forcément à être apprises par coeur.
Concentrez vous d'abord sur les formes indéterminées : savoir exactement les formes problématiques fait que vous pourrez "deviner" les autres intuitivement.

2) Limites et inégalités

a) Signe de la suite et signe de la limite

Théorème 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers une limite $\ell \neq 0$, alors u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang.

▷ *Preuve* :

◁

b) Passage à la limite dans une inégalité :

Corollaire 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers ℓ et ℓ'.
Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

▷ *Preuve :*

◁

Cas particulier d'application : suite majorée
Si on sait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq M,$$

alors on peut affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq M.$$

On dit qu'on "passe à la limite" dans l'inégalité.

Danger ! *Inégalités larges seulement !*
On ne travaille qu'avec des inégalités LARGES (c'est à dire $\leq$ ou $\geq$). Le théorème est faux avec des inégalités strictes (c'est à dire $<$ ou $>$).

Ainsi, si $u_n > M$ pour tout n, on n'a pas forcément $\lim_{n\to\infty} u_n > M$.

Par exemple avec $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, mais on n'a pas $\lim u_n > 0$.

A retenir : Lorsque l'on passe à la limite, les $<$ deviennent $\leq$ et les $>$ deviennent $\geq$.

c) Théorèmes d'encadrements (ou des gendarmes)

Théorème 4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $\lim u_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim v_n = \ell$.

▷ *Preuve :*

◁

Le théorème ci dessous, très similaire au précédent, peut s'utiliser pour les limites infinies, mais on n'a pas besoin d'un encadrement :

Théorème 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$.
Si $\lim u_n = +\infty$, *alors* $\lim v_n = +\infty$.
Si $\lim v_n = -\infty$, *alors* $\lim u_n = -\infty$

▷ *Preuve :* Même genre de preuve. ◁

Méthode : *Produit par une suite bornée et utilisation du théorème des gendarmes*

Le théorème d'encadrement permet de traiter rapidement certains cas avec un produit par une suite bornée :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la forme $u_n = a_n b_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_n \to 0$ et b_n bornée.

- On écrit que $|u_n| = |a_n||b_n|$,
- Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M$. On obtient alors l'encadrement :

$$0 \leq |u_n| \leq M|a_n|$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} M|a_n| \to 0$ aussi et le théorème d'encadrement permet de conclure que $|u_n| \to 0$, donc $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$.

Exemple :
Soit $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

3) Suites bornées

a) Convergence et suites bornées

Théorème 6

Toute suite convergente est bornée.

▷ *Preuve :*

◁

b) Théorème de la limite monotone

Théorème 7

1. *Toute suite réelle croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.*
2. *Toute suite croissante non majorée diverge et a pour limite $+\infty$.*

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 2

1. *Toute suite réelle décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.*
2. *Toute suite décroissante non minorée diverge et a pour limite $-\infty$.*

▷ *Preuve* : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On applique le théorème précédent à $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on montre donc sa convergence. ◁

En résumé : une suite monotone admet toujours une limite. Cette limite est finie (donc la suite converge) si et seulement si la suite est bornée.

III Méthodes élémentaires de calcul de limite

1) Factorisation par le terme "le plus fort"

Pour des limites de suite du type $\dfrac{A_n}{B_n}$ où A_n et B_n sont des sommes de suites, une technique souvent efficace est de factoriser A_n et B_n par leurs termes "les plus forts" et d'appliquer les propriétés d'opérations sur les limites.

Exemple :

- $u_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{5n^3 + n^2 - n - 1}$

- $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{\sin n + 4 - n^3}$.

2) Croissance comparée

Pour appliquer la technique de factorisation par le terme le plus fort, on peut utiliser les "croissances comparées". On les montrera dans le chapitre sur les limites de fonctions, mais on peut les rappeler ici :

Proposition 1

(i) puissances contre logarithme : $\forall \alpha > 0, \beta > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$

(ii) puissances contre géométrique : $\forall \alpha > 0, q > 1 \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$

(iii) Puissances contre factorielle : $\forall q > 1, \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$

On résume parfois cela de cette façon :

$$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll q^n \ll n!$$

Le symbole "$\ll$" signifiant que l'un est "négligeable" par rapport à l'autre.

Exemple :

- $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - (\ln n)^2}{\sqrt{n}}$.

3) Racines

a) "Faire sortir de la racine"

Factoriser par le terme de plus haut degré dans la racine carré peut être très utile :

Exemple :

- $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - 2n$.

b) Expression conjuguée

La factorisation ne suffit pas toujours. Lorsque la limite est de la forme $\sqrt{A_n} - B_n$ et qu'on a une forme indéterminée, on peut écrire

$$\sqrt{A_n} - B_n = \frac{(\sqrt{A_n} - B_n)(\sqrt{A_n} + B_n)}{\sqrt{A_n} + B_n} = \frac{A_n - B_n^2}{\sqrt{A_n} + B_n}$$

On dit qu'on utilise l'expression conjuguée.

Exemple :

- $u_n = \sqrt{4n^2 + 1} - 2n$.

Remarque :
Vous devrez parfois combiner les deux à la fois (expression conjuguée + factorisation) :

- $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n$.

IV Études de convergence de suite

1) Convergence des suites usuelles

Proposition 2

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}^*$. *Alors* $\lim u_n = +\infty$ *si* $r > 0$ *et* $\lim u_n = -\infty$ *si* $r < 0$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *alors :*
   - *si* $|q| < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim u_n = 0$.
   - *si* $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* u_0.
   - *si* $q > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge et* $\lim u_n = +\infty$ *ou* $-\infty$ *selon le signe de* u_0.
   - *si* $q \leq -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge sans limite.*

▷ *Preuve :*

1. $u_n = u_0 + nr$, d'où l'affirmation.
2. On a $u_n = u_0 q^n$.
   Considérons la suite $v_n = q^n$ et posons $w_n = |v_n|$. On a $w_n = |q|^n$.
   Traitons tous les cas possibles sur q :

◁

2) Suites adjacentes

Définition 3

Deux suites (a_n) et (b_n) réelles sont dites adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim(b_n - a_n) = 0$

Théorème 8

Si deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

▷ *Preuve :* Supposons $a_n \nearrow$ et $b_n \searrow$. Posons $u_n = b_n - a_n$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{b_{n+1} - b_n}_{\leq 0} \underbrace{-a_{n+1} + a_n}_{\leq 0}$$

donc $u_n \searrow$ et $u_n \to 0$ par hypothèse. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
Comme $b_n \searrow$ et $a_n \nearrow$, on a $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.
La suite (a_n) est donc croissante et majorée (par b_0) : elle converge vers une limite ℓ. De même, (b_n) converge vers une limtie ℓ'.
Ainsi, $\lim a_n - b_n = \ell - \ell'$ mais on sait que $\lim a_n - b_n = 0$, donc $\ell = \ell'$.

◁